Ganzrationale

Funktionen

Einfaches Niveau für Klasse 10:

Grundeigenschaften
Großes Bilderbuch für Funktionen

Dazu Berechnung der Nullstellen

also Training zum Lösen von Gleichungen 2. bis 5. Grades
Ferner quadratische Ungleichungen

Datei Nr. 18070

Stand 9. August 2012
(sehr alter Text)

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text zeigt in erster Linie auf, wie man bei diesen Funktionen ohne große Hilfsmittel der Analysis die Grundeigenschaften von ganzrationalen Funktionen ermittelt:

Symmetrieverhalten – Verhalten für $x \to \pm\infty$ - Berechnung der Nullstellen.

Dann zeigt er, wie man das gute Mittel der Gebietseinteilung verwenden kann, um weitere Details über den Kurvenverlauf herauszufinden.

Schließlich folgt eine große **Sammlung an Beispielfunktionen** und deren Eigenschaften.

Dieser Teil ist wie ein Bilderbuch, der verschiedene Funktionen/Kurven zeigt und Beispielrechnungen zu deren Nullstellen enthält.

INHALT

1 Grundlagen

Nach der Behandlung der Potenzfunktionen in der Datei 18005 schauen wir uns wichtige Eigenschaften der sogenannten ganzrationalen Funktionen an.
Wir definieren zuerst:

> Eine Funktion heißt **ganzrational**, wenn man ihren Funktionsterm auf diese Form bringen kann:
> $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_o$$

Die Zahlen a_o, a_1 bis a_n heißen die **Koeffizienten** der Potenzen x^o, x^1 bis x^n.
Der Koeffizient a_o heißt auch "das **Absolutglied**", weil er im Grunde ohne x absolut unveränderlich ist, während $a_1 x$ usw. die Variable x dabei haben.
Die höchste vorkommende Hochzahl n (mit $a_n \neq 0$) heißt **Grad der Funktion**.
Der Term auf der rechten Seite heißt auch **Polynom** in der **Normalform**.

BEISPIELE:

$f_1(x) = x^4 - 3x^3 - 2x + 1$ ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades mit den Koeffizienten $a_4 = 1$, $a_3 = -3$, $a_2 = 0$, $a_1 = -1$, und $a_o = 1$.

$f_2(x) = \frac{1}{20} x^5 - 5x^3 + 2x$ ist eine ganzrationale Funktion 5. Grades mit den Koeffizienten $a_5 = \frac{1}{20}$, $a_4 = a_2 = a_0 = 0$, $a_3 = -5$ und $a_1 = 2$.
Weil das Polynom nur ungerade Exponenten hat, nennt man f_2 auch eine <u>ungerade Funktion</u>.

$f_3(x) = (x^2 - 1)^2$ ist eine <u>gerade</u> ganzrationale Funktion 4. Grades. Dies erkennt man, wenn man das Polynom in die Normalform bringt: $f_3(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

Der **Definitionsbereich** einer Funktion besteht aus allen reellen Zahlen, denen man einen Funktionswert zuordnen kann. Einschränkungen ergeben immer nur diese drei Rechenoperationen:

Dividieren:	ist durch 0 nicht möglich
Ziehen einer Wurzel:	ist aus negativen Zahlen nicht möglich
Logarithmieren:	ist nur bei positiven Zahlen möglich.

Da bei ganzrationalen Funktion x weder im Nenner, noch unter einer Wurzel oder in einem Logarithmus vorkommt, haben alle ganzrationalen Funktionen den maximalen Definitionsbereich $D = R$, d.h. zu jeder reellen Zahl ist ein Funktionswert berechenbar.

Die Zuordnung $x \to f(x)$ kann man auch geometrisch als Punkt $P(x|f(x))$ darstellen.

Die Menge aller solchen Punkte nennt man den **Graph** oder das **Schaubild** der Funktion, oder auch eine **Kurve**.

Es gibt nun einige Merkmale, die rasch erkennen lassen, ob bestimmte Eigenschaften vorliegen. Diese werden nun besprochen.

2 Symmetrieeigenschaften von Kurven

Eine ausführliche Behandlung der Methoden zur Symmetrieuntersuchung finden Sie in der Datei "41211 Symmetrie" in der Homepage www.mathe-cd.de oder auf der Mathematik-CD.

Hier die Zusammenstellung der zwei wichtigsten Untersuchungen:

Symmetrienachweis

Einfache Symmetrien: Berechne f(- x)!

Gilt für alle $x \in R$:

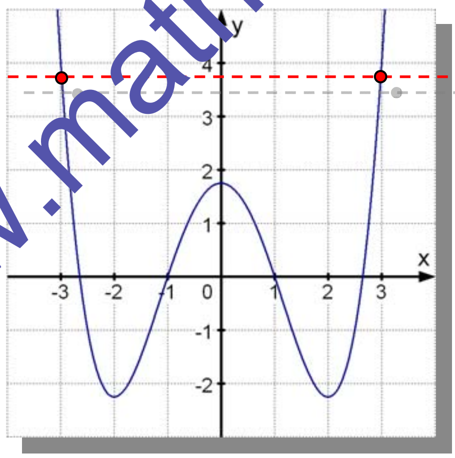
f(-x) = f(x) , dann ist K symmetrisch zur y-Achse.

f(-x) = - f(x), dann ist K punktsymmetrisch zum Ursprung.

Beispiele

(1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{7}{4}$

Weil f nur gerade Exponenten hat, gilt $f(-x) = f(x)$ d.h. das Schaubild von f ist **symmetrisch zur y-Achse**.

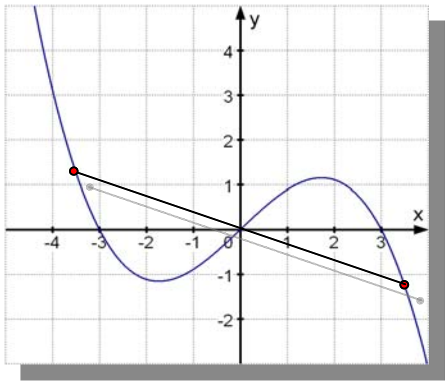


(2) $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + x$

Weil f nur ungerade Exponenten hat, gilt

$$f(-x) = -\tfrac{1}{9}(-x)^3 + (-x) = +\tfrac{1}{9}x^3 - x = -f(x)$$

d.h. das Schaubild ist **punktsymmetrisch zum Ursprung**



(3) $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + 2x - 3$

Weil f ungerade **und** gerade Exponenten hat (das Absolutglied gehört zu x^0) , **ist keine Symmetrie der beiden genannten Symmetrien erkennbar**

Und doch ist eine vorhanden: die Punktsymmetrie zu $Z(0|-3)$